***„Mogę się poprawiać przez ciężką pracę”***

**Temat: Miejsca zerowe i postać iloczynowa funkcji kwadratowej**

Funkcję kwadratową można przedstawić w postaci

Ogólnej $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$

Kanonicznej $f\left(x\right)=a\left(x-p\right)^{2}+q$

Iloczynowej $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)(x-x\_{2})$ dla $∆>0$

 $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{0}\right)^{2}$ dla $∆=0$

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem kierunkowym, takim, że a≠0, a $x\_{1}, x\_{2}$ miejscami zerowymi funkcji f(x).

Uwaga! Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje.

**Zaletą postaci iloczynowej** jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a>0), czy do dołu (a<0).

Metody zamiany postaci ogólnej na iloczynową i wyznaczanie miejsc zerowych:

1. Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia

$$a^{2}-b^{2}=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

$$f\left(x\right)=x^{2}-4=\left(x-2\right)\left(x+2\right)$$

miejsca zerowe $x\_{1}=2; x\_{2}=-2$

$$a^{2}-2ab+b^{2}$$

$$f\left(x\right)=x^{2}-6x+9=\left(x-3\right)^{2}$$

$$miejsce zerowe x\_{1}=x\_{2}=3$$

$$a^{2}+2ab+b^{2}=\left(a+b\right)^{2}$$

$$f\left(x\right)=x^{2}+2x+1=\left(x+1\right)^{2}$$

$$miejsce zerowe x\_{1}=x\_{2}=-1$$

1. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

$$f\left(x\right)=4x^{2}-8x=4x(x-2)$$

$$miejsca zerowe x\_{1}=0; x\_{2}=2$$

1. Skorzystanie ze wzorów
* Obliczyć deltę $∆=b^{2}-4ac$
* Gdy $∆<0$ to nie ma postaci iloczynowej
* Gdy $∆=0$, to $x\_{1}=x\_{2}=-\frac{b}{2a}$
* Gdy $∆>0$, to $x\_{1}=\frac{-b-\sqrt{∆}}{2a}$ $x\_{2}=\frac{-b+\sqrt{∆}}{2a}$
1. $f\left(x\right)=3x^{2}-5x+7$

$$∆=(-5)^{2}-4∙3∙7=25-84=-59$$

$$funkcja nie ma miejsc zerowych i postaci iloczynowej$$

1. $f\left(x\right)=-2x^{2}-3x+2$

$$∆=(-3)^{2}-4∙\left(-2\right)∙2=9+16=25$$

miejsca zerowe $x\_{1}=\frac{3-\sqrt{25}}{-4}=\frac{3-5}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

$$x\_{2}=\frac{3+\sqrt{25}}{-4}=\frac{3+5}{-4}=\frac{8}{-4}=-2$$

postać iloczynowa $f\left(x\right)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+2\right)$

1. $f\left(x\right)=-4x^{2}-4x-1$

$$∆=(-4)^{2}-4∙\left(-4\right)∙\left(-1\right)=16-16=0$$

$$jedno miejsce zerowe x\_{1}=x\_{2}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

postać iloczynowa $f\left(x\right)=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}$

Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji z postaci kanonicznej

1. Rozwiązywanie równań
2. $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}+4$

Aby wyznaczyć miejsca zerowe rozwiązujemy równanie $\left(x-1\right)^{2}+4=0$

$$\left(x-1\right)^{2}=-4$$

Lewa strona równania jest dla każdego x nieujemna, prawa strona jest równa -4 więc równanie nie ma rozwiązania. Nie ma miejsc zerowych.

1. $f\left(x\right)=\left(x+4\right)^{2}-1$

Rozwiązujemy równanie $\left(x+4\right)^{2}-1=0$

$$\left(x+4\right)^{2}=1$$

$$x+4=1 lub x+4=-1$$

$$x\_{1}=-3; x\_{2}=-5$$

1. Sprowadzanie funkcji do postaci ogólnej i obliczanie miejsc zerowych z metod podanych wyżej.

ZADANIA

6.18

a) $f\left(x\right)=x^{2}-5x+6$

Miejsce zerowe obliczamy rozwiązując równanie $f\left(x\right)=0$

$$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^{2}-5∙\left(-1\right)+6=1+5+6=12\ne 0$$

$$f\left(2\right)=2^{2}-5∙2+6=4-10+6=0$$

$$f\left(3\right)=3^{2}-5∙3+6=9-15+6=0$$

Miejsca zerowe to liczby 2, 3.

6.19

d) $f\left(x\right)=\frac{3}{4}x^{2}-3x=x\left(\frac{3}{4}x-3\right)$

$$x\left(\frac{3}{4}x-3\right)=0$$

$$x=0 lub \frac{3}{4}x-3=0$$

 $\frac{3}{4}x=3$

 $x=4$

Miejsca zerowe to $x=\left\{4,0\right\}$

6.20

b) $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}+4=-\frac{1}{2}\left(x^{2}-8\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)$

Aby wyznaczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej zamieniamy ją na postać iloczynową lub korzystamy ze wzorów.

$$-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)=0$$

$$\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)=0$$

$$\left(x-\sqrt{8}\right)=0 lub \left(x+\sqrt{8}\right)=0$$

$$x\_{1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} x\_{2}=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej to $ x\_{1}=2\sqrt{2} , x\_{2}=-2\sqrt{2}$

6.21

d) $f\left(x\right)=-\frac{1}{3}x^{2}-2x-3$

$$∆=\left(-2\right)^{2}-4∙\left(-\frac{1}{3}\right)∙\left(-3\right)=4-4=0$$

Funkcja ma jedno miejsce zerowe

$$x\_{1}=x\_{2}=\frac{2}{-\frac{2}{3}}=-3$$

6.22

a) $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}-4$

$$\left(x-1\right)^{2}-4=0$$

$$\left(x-1\right)^{2}=4$$

Po lewej stronie jest wyrażenie nieujemne, po prawej stronie jest wyrażenie dodatnie więc

$$x-1=2 lub x-1=-2$$

Miejsca zerowe to $x\_{1}=3 x\_{2}=-1$

f) $f\left(x\right)=-0,5\left(x+7\right)^{2}-1$

$$-0,5\left(x+7\right)^{2}-1=0$$

$$-0,5\left(x+7\right)^{2}=1$$

$$\left(x+7\right)^{2}=-2$$

To równanie nie ma rozwiązania ponieważ lewa strona równania jest nieujemna, a prawa ujemna.

Funkcja nie ma miejsc zerowych

6.23

c)$ f\left(x\right)=-x^{2}+6x-10=-\left(x^{2}-6x+10\right)=-\left(x-3\right)^{2}-1$

$$-\left(x-3\right)^{2}-1=0$$

$$-\left(x-3\right)^{2}=1$$

$$\left(x-3\right)^{2}=-1$$

To równanie nie ma rozwiązania ponieważ lewa strona równania jest nieujemna, a prawa ujemna.

Funkcja nie ma miejsc zerowych

d)$ f\left(x\right)=0,5x^{2}+8x+32=0,5\left(x^{2}+16x+64\right)=0,5\left(x+8\right)^{2}+0$

$$0,5\left(x+8\right)^{2}=0$$

$$\left(x+8\right)^{2}=0$$

$$x+8=0$$

$$x=-8$$

Funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe $x\_{1}=-8$

6.24

a) $f\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(x-5\right)$

$$\left(x+3\right)\left(x-5\right)=0$$

$$x+3=0 lub x-5=0$$

Miejsca zerowe $x\_{1}=-3, x\_{2}=5$

$$p=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}$$

$$p=\frac{-3+5}{2}=1$$

$$q=f\left(p\right)$$

$$q=f\left(1\right)=\left(1+3\right)\left(1-5\right)=4∙\left(-4\right)=-16$$

$$W=\left(1,-16\right)$$

6.25

e) $f\left(x\right)=2x^{2}-8x+6$

a=2

b= -8

c=6

$$∆=\left(-8\right)^{2}-4∙2∙6=64-48=16$$

Miejsca zerowe $x\_{1}=\frac{8-4}{4}=1 x\_{2}=\frac{8+4}{4}=3$

$$p=\frac{8}{4}=2$$

$$q=\frac{-16}{8}=-2$$

$$W=\left(2,-2\right)$$

OY: (0,6)

Oś symetrii paraboli ma równanie x=2 więc punkt symetryczny do punktu (0,6) względem osi symetrii ma współrzędne (4,6)

6.26

a) $x\_{1}=2, x\_{2}=-4, ZW:y\in \left〈-8,+\infty )\right.$

$$p=\frac{2-4}{2}=-1$$

$$q=-8$$

Postać kanoniczna $f\left(x\right)=a\left(x+1\right)^{2}-8$

Ponieważ miejscem zerowym jest liczba 2 więc f(2)=0

$$f\left(2\right)=a\left(2+1\right)^{2}-8=0$$

$$a\left(2+1\right)^{2}=8$$

$$9a=8$$

$$a=\frac{8}{9}$$

Postać kanoniczna $f\left(x\right)=\frac{8}{9}\left(x+1\right)^{2}-8$

6.27

c) $W=\left(-5,9\right), x\_{1}=-8$

$$p=-5, q=9$$

postać kanoniczna $f\left(x\right)=a\left(x+5\right)^{2}+9$

$$f\left(-8\right)=0 więc a\left(-8+5\right)^{2}+9=0$$

$$a\left(-8+5\right)^{2}=-9$$

$$9a=-9$$

$$a=-1$$

postać kanoniczna $f\left(x\right)=-1\left(x+5\right)^{2}+9$

$$-1\left(x+5\right)^{2}+9=-\left(x^{2}+10x+25\right)+9=-x^{2}-10x-16$$

postać ogólna $f(x)=-x^{2}-10x-16$